Cours sur les fonctions réelles : continuité et limite

Notation : $x \to a^+ \quad \Leftrightarrow \quad x \to a \quad et \quad x > a$

1 Généralités sur les fonctions réelles à valeurs réelles

1.1 Définition

Définition 1 *application*
Définir une application f d'un ensemble E dans un ensemble F c'est associer à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$.
- *E est appelé ensemble de départ et F ensemble d'arrivée.*
- *$f(x)$ est appelé image de x par l'application f.*
- *On appelle antécédent de $y \in F$, si il existe, tout élément x de E tel que $f(x) = y$.*
- *Soit A une partie de E, on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A :*
  $f(A) = \{f(x), x \in A\}$

Définition 2 *Graphe d'une application*
Soit une application $f : E \to F$. L'ensemble des couples $(x, f(x))$ de $E \times F$ est appelé graphe de f.

Définition 3 *fonction réelle*
On appelle fonction, notée ici f, d'une variable réelle à valeur réelle une application d'une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{D}_f$ est appelé l'ensemble de définition de f.

Définition 4 *Image par une fonction*
Soit une fonction f définie sur un ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$. On appelle image par f de l'ensemble $\mathcal{D}$ l'ensemble des valeurs réelles prises par f lorsque x décrit $\mathcal{D}$. On note cet ensemble $f(\mathcal{D})$.

Exemple 1 *Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin x$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'image par f des intervalles suivants : $\mathbb{R}$, $[0; \pi]$, $[-\pi; 0[$.*

1.2 Propriétés élémentaires

Dans la suite de ce cours, on note I un intervalle compris dans $\mathcal{D}_f$.

Définition 5 *Fonctions croissante et décroissante*
Soit une fonction réelle f définie sur I.
- *f est dite croissante (resp. strictement croissante) sur I ssi*

- *f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) sur I ssi*

Propriété 1 *Sens de variation et ordre*
Une fonction croissante sur un intervalle I conserve l'ordre sur I alors qu'une fonction décroissante sur un intervalle I inverse l'ordre sur I.

Définition 6 *Fonction monotone*
Soit une fonction réelle f définie sur I. f est dite monotone (resp. strictement monotone) sur I ssi f est croissante ou décroissante (resp. strictement ...) sur I.

Définition 7 *Fonction majorée et minorée*
Soit une fonction réelle f définie sur I. f est dite majorée (resp. minorée) sur I ssi

Définition 8 *Fonction bornée*
Soit une fonction réelle f définie sur I. f est dite bornée sur I ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque 1 *f bornée $\Leftrightarrow$ $|f|$ majorée*

Exemple 2 *Montrer que la fonction $\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ est bornée.*

Définition 9 *Parité*
Soit une fonction réelle f définie sur I.
– ***f est dite paire sur I ssi***

Exemples :
Application : *La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f dans un repère orthogonal admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Le domaine d'étude de f se limite aux valeurs positives.*

– ***f est dite impaire sur I ssi***

Exemples :
Application : *La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f dans un repère orthogonal admet l'origine O comme centre de symétrie. Le domaine d'étude de f se limite aux valeurs positives.*

Exemple 3 *Etudier la parité de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+x^2}$.*

Définition 10 *Périodicité*
Soit une fonction réelle f définie sur I.
f est dite périodique sur I de période $\mathcal{T}$ ssi

Exemples :
Application : *La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f dans un repère orthogonal est invariante par la translation de vecteur $\mathcal{T}\vec{i}$. Le domaine d'étude de f se limite à $]0;\mathcal{T}]$.*

Exemple 4 *Etudier la périodicité de la fonction* $\cos(2x+\dfrac{\pi}{2})$.

1.3 Opération et fonction

Définition 11 *Restriction d'une fonction*
Soit une fonction réelle f définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathcal{D}_f$. La fonction $f_{\mathcal{D}}$ définie sur $\mathcal{D}$ par $\forall x \in \mathcal{D}, f_{\mathcal{D}}(x) = f(x)$ s'appelle la restriction de f à $\mathcal{D}$..

Définition 12 *Opération*
Soient f et g deux fonctions définies sur I. On définit alors :
- *l'addition de f et g : $\forall x \in I, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$*
- *le produit de f par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$: $\forall x \in I, (\alpha f)(x) = \alpha \times f(x)$*
- *le produit de f et g : $\forall x \in I, (fg)(x) = f(x) \times g(x)$*
- *l'inverse de f, f non nulle sur I : $\forall x \in I, (\dfrac{1}{f})(x) = \dfrac{1}{f(x)}$*
- *une relation d'ordre : $f \leq g$ sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \leq g(x)$*

Définition 13 *Composition*
Soit une fonction réelle f définie sur I et une fonction g telle que g soient définie sur $f(I)$. On définit la composition de f et g, notée gof par $\forall x \in I, (gof)(x) = g(f(x))$.

Exemple 5 *Déterminer les fonctions gof et fog pour $f(x) = \sin x$ et $g(x) = 2x + 3$.*

Exemple 6 *Décomposer les fonctions $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 1)$ et $g(x) = \sin^2(x) + 3\sin(x) - 7$.*

1.4 fonction réciproque

Définition 14 *injectivité, surjectivité, bijectivité*

- ***injectivité :*** *une application $f : E \to F$ est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f.*

- ***surjectivité :*** *une application $f : E \to F$ est surjective si tout élément de F a au moins un antécédent par f.*

- ***bijectivité :*** *une application $f : E \to F$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective.*

Propriété 2 *Fonction réciproque (admis)*
Soit une application bijective $f : E \to F$. Il existe alors une unique application notée $f^{-1} : F \to E$ telle que $f^{-1}of = Id_E$ et $fof^{-1} = Id_F$. f^{-1} est appelée fonction réciproque de f.

Propriété 3 *Fonction réciproque et monotonie (admis)*
Soit une fonction, f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et monotone sur I alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

Exemple 7 *Montrer que la fonction $f(x) = 2x + 3$ est bijective et en déduire l'expression de f^{-1}.*

Exemple 8 *Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ est bijective et en déduire l'expression de f^{-1}.*

2 Limites

2.1 Définition

2.2 Limite et opération

2.3 Règles de calculs

La lettre a représente dans les tableaux un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Les règles de calcul sont :

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) =$						

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) =$								

Limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) =$								

Limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$0^+ ou 0^-$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	0^+	0^+	0^-	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	$0^+ ou 0^-$
$\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) =$									

Corollaire 1 *Application aux fonctions polynômes et fractions rationnelles*
- *Une fonction polynôme se comporte en $\pm\infty$ comme son terme de plus haut degré.*
- *Une fraction rationnelle se comporte en $\pm\infty$ comme le quotient des termes de plus haut degré.*

Propriété 4 *Fonction composée*
Soient u et v deux fonctions telle que vou soit définie, a, b et c trois réels, $\pm\infty$:

$$si \quad \lim_{x\to a} u(x) = b \quad \lim_{x\to b} v(x) = c \quad alors \quad \lim_{x\to a}(vou)(x) = c$$

Exemple 9 *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+1}$ *et* $\lim\limits_{x\to 1} e^{ln(x-1)}$

2.4 Limites de référence

Propriété 5 *Limites de référence : $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

3 Continuité

3.1 Définition

Définition 15 *Continuité*
Soit une fonction réelle f définie sur un intervalle I. Soit un réel $a \in I$. La fonction f est dite continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Par extension, f est dite continue sur I si elle est continue pour tout réel de I.

Remarque 2

1. *Si f est continue en a alors f doit être définie sur un voisinage de a de la forme $]a-\epsilon; a+\epsilon[, \epsilon > 0$.*
2. *f est continue à droite en a si f est définie sur un voisinage de la forme $[a; a+\epsilon[, \epsilon > 0$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.*
3. *f est continue à gauche en a si*

4. *On reconnait graphiquement qu'une fonction est continue sur un intervalle I si elle peut être tracée sans lever le crayon.*

3.2 Propriétés

Propriété 6 *Le produit, la somme, la composée, le quotient de fonctions continues est une fonction continue sur son ensemble de définition (application des propriétés sur les limites).*

Propriété 7 *Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.*

Démonstration

La réciproque est fausse Les fonctions $\sqrt{x}$ et $|x|$ sont continues en 0 mais non dérivables en 0.

Corollaire 2 .
– *Les fonctions polynômes,* cos, sin *et* exp *étant dérivables sur $\mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*
– *La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $\ln x$ est continue sur $]0; +\infty[$.*
– *Les fractions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.*

3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété 8 *Théorème des valeurs intermédiaires (admis)*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c appartenant à $[a;b]$ tel que $f(c)=\lambda$.

Corollaire 3 *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration

Corollaire 4 *Si f est définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes.*

Démonstration graphique

Application Le théorème des valeurs intermédiaires permet de montrer l'existence d'une solution à l'équation $f(x)=\lambda$ mais pas l'unicité de la solution.

Exemple 10 *Démontrer que la fonction $f(x)=\cos x$ admet un point fixe sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.*

4 Ordre et limite

Propriété 9 *Ordre et limite (admis)*
Si au voisinage de a on a $f(x)\leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim_{x\to a} g(x)=l'$ alors $l\leq l'$.

Propriété 10 *(admis)*
Si pour tout $x>b$ on a $f(x)\leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Exemple 11 *Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)=x+\sin x$.*

Propriété 11 *(des gendarmes)*
- *Si au voisinage de a on a $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x)=\lim\limits_{x\to a} v(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.*
- *Si pour tout $x>b$, on a $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.*

Exemple 12 *Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.*

5 Asymptotes

Soit une fonction f et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Définition 16 .

1. ***asymptote verticale :*** *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *alors* $\mathcal{C}_f$ *admet la droite d'équation* $x = a$ *comme asymptote verticale.*

2. ***asymptote horizontale :*** *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ *alors* $\mathcal{C}_f$ *admet la droite d'équation* $y = b$ *comme asymptote horizontale en* $+\infty$.

3. ***asymptote oblique :*** *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax + b = 0$ *alors* $\mathcal{C}_f$ *admet la droite d'équation* $y = ax + b$ *comme asymptote oblique en* $+\infty$.

6 Equivalents